(Β-51) ΛΥΣΕΙΣ

ii) ΝΔΟ όλες οι λύσεις της

$y''+2y'+2y=b$ είναι φραγμένες

ΛΥΣΗ

χπ $\lambda^2+2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-1\pm i$

Βελ $S=\{e^{-x}\cos x,\ e^{-x}\sin x\}$

Άρα, $y_{\substack{\text{γεν}\\ \text{ομογ}}}=c_1 e^{-x}\cos x+c_2 e^{-x}\sin x$

επίσης,

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & e^{-x}\sin x \\ -e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x & -e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x \end{vmatrix}=e^{-2x}$$

$$W_1(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} 0 & e^{-x}\sin x \\ 1 & -e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x \end{vmatrix}=-e^{-x}\sin x$$

$$W_2(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} e^{-x}\cos x & 0 \\ -e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x & 1 \end{vmatrix}=e^{-x}\cos x$$

$$y_\mu(x)=e^{-x}\cos x\int_0^x \frac{-e^{-s}\sin s}{e^{-2s}}b(s)\,ds+e^{-x}\sin x\int_0^x \frac{e^{-s}\cos s}{e^{-2s}}b(s)\,ds=$$

$$=e^{-x}\cos x\int_0^x e^{s}\sin s\, b(s)\,ds+e^{-x}\sin x\int_0^x e^{s}\cos s\, b(s)\,ds,\ x\geq 0$$

ΘΔΟ η $y_\mu(x)$ φραγμένη

διότι η $y_{\substack{\text{γεν}\\ \text{ομογ}}}$ φραγμένη (και $y_{o\lambda}=y_{\substack{\text{γεν}\\ \text{ομογ}}}+y_\mu$)

Για $x\geq 0$:

$$|y_\mu(x)|\leq e^{-x}|\cos x|\cdot\int_0^x e^{s}|\sin s|\,|b(s)|\,ds+$$

$$+e^{-x}|\sin x|\cdot\int_0^x e^{s}|\cos s|\,|b(s)|\,ds\leq$$

$$\leq e^{-x}\int_0^x e^{s}|b(s)|\,ds+e^{-x}\int_0^x e^{s}|b(s)|\,ds=$$

$$=2e^{-x}\int_0^x e^{s}|b(s)|\,ds\overset{(i)}{\leq} 2c\,\frac{e}{e-1}$$

Συνεπώς, $|y_{o\lambda}(x)|\leq c_1+c_2+2c\,\frac{e}{e-1}$ ο.ε.δ.

(B-24)

Έστω $\{y_1, y_2\}$ ΒΣΛ και γραμμική ομογενής Δ.Ε $L(y)=0$ $\beta'$-τάξης στο $(-\infty, 0)$. ΝΔΟ μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της $y_1$ υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της $y_2$

ΛΥΣΗ

Ας είναι $\rho_1, \rho_2$ $(\rho_1 < \rho_2)$ δυο διαδοχικές ρίζες του $y_1$

Έστω ότι η $y_2$ δεν έχει ρίζα στο $(\rho_1, \rho_2)$

τότε παρατηρούμε ότι θα πρέπει $y_2(\rho_1) \neq 0$ και $y_2(\rho_2) \neq 0$.

Πράγματι εάν $y_2(\rho_1) = 0$ τότε

$$W(y_1, y_2)(\rho_1) = \begin{vmatrix} y_1(\rho_1) & y_2(\rho_2) \\ y_1'(\rho_1) & y_2'(\rho_2) \end{vmatrix} = 0 \text{ , άτοπο}$$

Αφού, οι ρίζες είναι γραμ. ανεξάρτητες

Άρα, η $y_2$ διατηρεί σταθ πρόσημο στο $[\rho_1, \rho_2]$ $(*)$

Ας είναι $\frac{y_1}{y_2}(x) = h(x)$, $x \in [\rho_1, \rho_2]$ αφού $y_2(x) \neq 0$ (από $(*)$)

Παρατηρούμε ότι $h(\rho_1) = 0 = h(\rho_2)$ h παραγωγ. $[\rho_1, \rho_2]$

$$\xrightarrow{\text{Θ. Rolle}} \exists \xi \in (\rho_1, \rho_2) : h'(\xi) = 0 \Rightarrow -\frac{W(\xi)}{y_2^2(x)} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R} : h(\xi) = 0$ άτοπο $\Rightarrow$ Η $y_2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\rho_1, \rho_2)$

Αν υποθέσουμε ότι η $y_2$ έχει 2 ρίζες

$\rho_1 < \xi_1 < \xi_2 < \rho_2$ τότε θα πρέπει η $y_1$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\xi_1, \xi_2)$ άτοπο

(διότι υποθέσαμε ότι οι $\rho_1, \rho_2$ διαδοχικές)

(B-38)

Έστω $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$

όπου $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, 1, \dots, n-1$

$y_0$: λύση της $L(y)=0$ ομογενούς που πλ ροί τις συνθήκες

$y_0(0) = y_0'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0$, $y_0^{(n-1)}(0) = 1$

ΝΔΟ $y_H(x) = \int_0^x y_0(x-s)\, b(s)\, ds$ με $y_H(0) = \dots = y_H^{(n-1)}(0) = 0$

ΛΥΣΗ

$$y_H' = y_0 \underbrace{(x-x)}_{\to 0} b(x) + \int_0^x y_0'(x-s)\, b(s)\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_M''(x) = \cancel{y'(x-x)} b(x)^{0} + \int_0^y y_0''(x-s)\, b(s)\, ds$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_M^{(n)}(x) = y^{(n-1)}(x-x)\, b(x) + \int_0^x y_0^{(n)}(s)\, b(s)\, ds$$

(B-52)

$y''' + w^2 \cdot y' = b \quad , w>0 \qquad b:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχ. μη μηδεν.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$(E_0) \quad y''' + w^2 \cdot y' = 0$

Θέτω $y' = z \Rightarrow z'' + w^2 z = 0 \xRightarrow{\times n} \lambda^2 + w^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \pm i w \Rightarrow y_{ομογ} = c_1 \cdot \cos wt + c_2 \sin wt$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos wt & \sin wt \\ -w \sin wt & w \cos t \end{vmatrix} = w$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin wt \\ 1 & \cos wt \end{vmatrix} = \sin wt$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos wt & 0 \\ -\sin wt & 1 \end{vmatrix} = \cos wt$$

Ξουζέρω $\quad z_M = \cos wx \int_0^x \frac{\sin wt}{w}\, b(t)\, dt + \sin wt \int_0^x \frac{\cos wt}{w} b(t)\, dt$

Άρα

$y' = z = y_{ΟΜΟΓ} + z_M$

(B-56, B-46) ΝΑ ΤΑ ΔΟΥΜΕ ΕΠΙΤΑ (SOS).